Mesure de la *Competitive Balance* dans les ligues de sports professionnels : ébauche d'une axiomatisation.

11 Octobre 2013

Séminaire DESport

J.-P. GAYANT (GAINS, Université du Maine)
N. LEPAPE (CREM, Université de Caen Basse Normandie)

- En économie du sport professionnel,la question de l'Equilibre Compétitif (*Competitive Balance* (CB)) occupe une place centrale (Rottenberg (1956), Neale (1964), …).

- Traditionnellement (c'est-à-dire dans le cadre du Baseball !) la mesure de la *Competitive Balance* s'est faite en calculant la variance σ^2 du nombre de victoires des équipes de la ligue (mesurée à l'issue de la saison)

- Une première question, *a priori* un peu anecdotique, s'est posée au sujet de la **mesure satisfaisante de la CB**, saison après saison, **lorsque la taille de la ligue (nombre d'équipes) change**.

- En réalité, la question n'est pas anecdotique car les changements de tailles de ligues sont fréquents :

Exemple des ligues de football :

Ligues promotion & relégation (depuis 1960)

→ Première ligue française. 1960 à 1963 : 20 clubs, 1964 et 1965 : 18 clubs, 1966 à 1968 : 20 clubs, 1969 et 1970 : 18 clubs, 1971 à 1997 : 20 clubs, 1998 à 2002 : 18 clubs, 2003 à 2013 : 20 clubs

→ Première ligue espagnole. 1960 à 1971 : 16 clubs, 1972 à 1987 : 18 clubs, 1988 à 1995 : 20 clubs, 1996 et 1997 : 22 clubs, 1998 à 2013 : 20 clubs

→ Première ligue anglaise. 1960 à 1987 : 22 clubs, 1988 : 21 clubs, 1989 à 1991 : 20 clubs, 1992 à 1995 : 22 clubs, 1996 à 2013 : 20 clubs

→ Première ligue italienne. 1960 à 1967 : 18 clubs, 1968 à 1988 : 16 clubs, 1989 à 2004 : 18 clubs, 2005 à 2013 : 20 clubs

→ Première ligue allemande. 1964 et 1965 : 16 clubs, 1966 à 1991 : 18 clubs, 1992 : 20 clubs, 1993 à 2013 : 18 clubs

Ligue fermée

→ MLS (USA). 1996 et 1997 : 10 clubs, 1998 à 2000 : 12 clubs, 2001 à 2004 : 10 clubs, 2005 et 2006 : 12 clubs, 2007 : 13 clubs, 2008 : 14 clubs, 2009 : 15 clubs, 2010 : 16 clubs, 2011 : 18 clubs, 2012 et 2013 : 19 clubs

- La principale réponse apportée à ce problème de changement de taille de Ligue est la réponse de Fort et Quirk (1995) : il faut calculer un ASD/ISD (Actual Standard Deviation/Idealized Standard Deviation) ratio, parfois appelé Relative Standard Deviation, qui est « insensible » aux changements de tailles de Ligues

- Pour calculer l'ISD, Fort et Quirk modélisent (en note de bas de page) le processus aléatoire qui conduirait à une distribution idéalisée à l'issue d'une compétition entre équipes de même force *(of equal playing strength)*.

- En vertu ce processus, chaque équipe à une probabilité ½ de gagner et une probabilité ½ de perdre contre n'importe quelle autre équipe de la Ligue.

- En raisonnant sur le pourcentage de victoires (et non le nombre), on obtient un ISD égal à $0{,}5/\sqrt{m}$ où m désigne le nombre de matchs joués dans la Ligue pendant la saison.

- Une autre réponse au problème de changement de taille de Ligue est celle de Depken (1999) : il faut calculer un dHHI égal à la différence entre la valeur effective de l'indice d'Hirshman-Herfindahl et ce que serait sa valeur minimale dans une Ligue parfaitement *balanced*.

→ L'idée de départ est qu'il existe une analogie (imparfaite) entre la mesure de la CB et la mesure de concentration dans une industrie car le nombre de points obtenus par une équipe est, en quelque sorte sa « part de marché »

- Comme la valeur du HHI_{min} diminue avec n (le nombre d'équipes dans la Ligue) calculer $dHHI = HHI - HHI_{min}$ permettrait de corriger de manière satisfaisante l'indice [avec $HHI_{min} = 1/n$]

- Une autre option consisterait à calculer le ratio HHI/HHI_{min} appelé par Pavlowski, Breuer et Howeman (2010) : HICB.

- Dans le cas de sports où le résultat peut être un match nul, de telles corrections peuvent poser problème.

- C'est ce que soulignent Cain et Haddock (2006) et ils suggèrent (sans modélisation du processus aléatoire) que le ISD peut prendre des valeurs autres que $0,5/\sqrt{m}$, selon les « cas ».

- Ce papier a fait l'objet de réponses de Fort (2007) et Owen (2012).

- Mais aucune des ces réponses n'est pleinement satisfaisante…

➢ aucun de ces papiers ne cherche à répondre à la question « essentielle » : l'indice calculé (σ^2, RSD, dHHI, HICB, Gini, C5, Relative Entropy, Generalized Entropy, …) respecte-t-il le **Principe des Transferts** ?

- Il existe une analogie évidente entre la mesure des inégalités de revenus (ou de salaires) et la mesure de la *Competitive Balance*, ou plutôt de la *Competitive Imbalance* dans les Ligues (Quirk and Fort (1992), Utt and Fort (2002) Borooah and Mangan (2012)…)

- Il serait donc bienvenu que les indices *d'Imbalance Competitive* respectent une liste de « bons » axiomes, comme les mesures d'inégalité (Indices de Gini, Indice de Atkinson-Kolm-Sen, Indice d'Entropie Généralisé…) au premier rang desquels l'axiome de Transférabilité ou « Principe des Transferts »

- Le Principe des Transferts dispose que tout transfert progressif (i. e. d'un individu plus riche vers un plus pauvre) doit faire diminuer l'indice d'inégalité

→ tout transfert de points d'une équipe mieux classée vers une équipe moins bien classée doit faire diminuer l'indice d'*Imbalance*

- Le premier obstacle à la définition d'un indice d'*Imbalance* satisfaisant est le design du *Point Award System* (P.A.S) ⟶ celui-ci permet-t-il seulement de s'interroger sur la simple possibilité que le « Principe des Transferts » soit respecté ?

➢ **NON, dans le cas d'un système (3-1-0) !**

- Ainsi, tous les indices d' *Imbalance* calculés sur la base de l'attribution réelle des points dans les sports où le P.A.S. est (3-1-0) sont entachés de défauts majeurs…

  et,

- a contrario, tous les indices d' *Imbalance* calculés sur la base d'une attribution fictive des points (assise sur un P.A.S. permettant de respecter, entre autres, le Principe des Transferts) sont entachés du défaut de fonder le calcul de l'indice sur la base d'un système *ex post* différent du système incitatif *ex ante* !

Oops !

- A quelque chose malheur est bon… La démonstration de ce que l'utilisation d'un P.A.S (3-1-0) transgresse les exigences minimales que doit vérifier tout indice d'*Imbalance* va faire émerger un cadre dans lequel une axiomatique des mesures de *l'Imbalance Competitive* peut être envisagée.

→ En effet, cette mise en évidence fait émerger le rôle-clé de la configuration polaire de la *Perfect Competitive Balance* : la *Perfect Competitive Imbalance*

- Cette configuration hypothétique n'est pas nouvelle : elle est évoquée ou esquissée chez Horowitz [1997], Utt et Fort [2002], Borooah et Mangan [2012] …

- Envisageons donc les distributions de points des équipes comme un ensemble de distributions encadré par deux cas « limites »…

L'Imbalance Competitive d'une ligue :

Entre la Perfect Competitive Balance (PCB) et la Perfect Competitive Imbalance (PCI)

Cadre formel

- Dans une ligue constituée de n équipes, chaque équipe rencontre 2 fois chacune des (n-1) autres équipes (matchs aller et retour). Elle joue donc 2(n-1) matchs. Le nombre total de matchs joués dans la ligue est m = n(n-1).

- Le *Point Award System est* (z_w-z_t-z_l).

La Perfect Competitive Balance (PCB) est une configuration qui peut être objectivée par :

- Chaque équipe gagne exactement (n-1) matchs et perd exactement (n-1) matchs (aucun match nul).

(ou : Toutes les parties se terminent par un match nul (PCB*))

On a alors: $p_{i,PCB} = (n-1) \times (z_w + z_l)$

La Perfect Competitive Imbalance (PCI) est une configuration qui peut être objectivée par :

- L'équipe 1 perd ses [2 × (n-1)] matchs, l 'équipe 2 gagne 2 matchs (les 2 matchs joués contre la précédente) et perd [2 × (n-2)] matchs, l'équipe 3 gagne 4 matchs (les 4 matchs joués contre les 2 précédentes) et perd [2 × (n-3)] matchs, …, l'équipe n gagne ses [2 × (n-1)] matchs (aucun match nul).

On a alors: $p_{i,PCI} = 2z_w \times (i-1) + 2z_l \times (n-i)$

Ce qui donne, dans le cas où $n = 20$, $z_t = 1$ et $z_l = 0$:

Team	$Z_w = 3$			$Z_w = 2$	
	PCI	PCB	PCB*	PCI	PCB et PCB*
20	114	57	38	76	38
19	108	57	38	72	38
18	102	57	38	68	38
17	96	57	38	64	38
16	90	57	38	60	38
15	84	57	38	56	38
14	78	57	38	52	38
13	72	57	38	48	38
12	66	57	38	44	38
11	60	57	38	40	38
10	54	57	38	36	38
9	48	57	38	32	38
8	42	57	38	28	38
7	36	57	38	24	38
6	30	57	38	20	38
5	24	57	38	16	38
4	18	57	38	12	38
3	12	57	38	8	38
2	6	57	38	4	38
1	0	57	38	0	38

N'importe quel indice *d'Imbalance Competitive* a vocation à prendre sa valeur minimale dans le cas de la PCB et sa valeur maximale dans le cas de la PCI (puisque, à partir de ce dernier cas seuls des transferts descendants de points -i.e. « progressifs »- sont possibles, ce qui doit faire chuter l'indice).

Or, puisque le total de points distribué est (en notant T le nombre de matchs nuls observés dans la saison) : $(n-1)(z_w+z_l)+T(2z_t-z_w-z_l)$, seul un P.A.S. tel que $2z_t = z_w + z_l$ permet que cette exigence minimale soit respectée.

→ Ce n'est donc pas le cas dans l'actuel système d'attribution de points dans toutes les grandes ligues de football professionnel européennes où $z_w = 3$, $z_t = 1$ et $z_l = 0$

Montrons le avec un exemple :

Configuration "A" : La moitié des équipes gagne chacune (n + n/2 - 1) matchs et perd (n/2 - 1) matchs. L'autre moitié perd chacune n matchs et fait (n-2) matchs nuls.

Ce qui donne, dans le cas où n = 20 :

Team	3 points for a win		2 points for a win	
	PCI	Config. A	PCI	Config. A
20	114	87	76	58
19	108	87	72	58
18	102	87	68	58
17	96	87	64	58
16	90	87	60	58
15	84	87	56	58
14	78	87	52	58
13	72	87	48	58
12	66	87	44	58
11	60	87	40	58
10	54	18	36	18
9	48	18	32	18
8	42	18	28	18
7	36	18	24	18
6	30	18	20	18
5	24	18	16	18
4	18	18	12	18
3	12	18	8	18
2	6	18	4	18
1	0	18	0	18

- Calculons l'Indice d'Imbalance des Config. A et PCI selon les 2 modes d'attribution des points (3-1-0) et (2-1-0)

- Utilisons, comme Indice d'Imbalance Competitive, l'Indice d'Herfindahl HHI (qui est cardinalement équivalent à σ^2 [$n\sigma^2$ = HHI - 1/n] et au cas particulier d'indice d'Entropie généralisé pour un paramètre égal à 2)

- Si, en utilisant le 2-1-0 Point Award System, nous obtenons bien :

$$HHI_{PCI} - HHI_{Config.A} = \frac{n^2 - 4}{12n(n-1)^2} > 0$$

Nous avons, en revanche, en utilisant le 3-1-0 Point Award System :

$$HHI_{PCI} - HHI_{Config.A} = \frac{2(n-2)^2(14-13n)}{3n(n-1)(11n-10)^2} < 0$$

Par exemple, dans le cas n = 20, avec un P.A.S. (2-1-0) :

$$HHI_{PCI} = 0{,}0684 > HHI_{Config.\ A} = 0{,}0638$$

Tandis qu'avec un P.A.S. (3-1-0) :

$$HHI_{PCI} = 0{,}0684 < HHI_{Config.\ A} = 0{,}0715\ !$$

Bref, il est impératif de mesurer l'Imbalance avec un P.A.S. tel que $2z_t = z_w + z_l$ … → dans toute la suite, nous allons, pour simplifier, raisonner sur un système d'attribution de points (2-1-0) qui assure donc que la configuration PCI sera bien la configuration la plus *Imbalanced* et qui permettra d'apprécier si des transferts progressifs conduisent bien à faire chuter l'indice retenu.

- Idée : L'existence de 2 configurations extrêmes suggère la possible définition de configurations intermédiaires (un mix des 2)… grâce auxquelles nous allons pouvoir faire émerger des axiomes !

- **Partons d'une distribution de *n* équipes initialement en PCI :**

Pour faire émerger une configuration intermédiaire hypothétique, nous allons construire le principe de *la substitution, au sein de la distribution des n équipes, d'un sous-ensemble de k équipes par un bloc d'équipes en PCB*

<table>
<tr><th>Team</th><th>Points</th><th>Blocks of teams</th></tr>
<tr><td>n^{th}</td><td>4(n-1)</td><td rowspan="4">(n-k-m) teams in PCI</td></tr>
<tr><td>$(n-1)^{th}$</td><td>4(n-2)</td></tr>
<tr><td>…</td><td></td></tr>
<tr><td>$(m+k+1)^{th}$</td><td>4(m+k)</td></tr>
<tr><td>$(m+k)^{th}$</td><td>4m+2(k-1)</td><td rowspan="4">k teams in PCB</td></tr>
<tr><td>$(m+k-1)^{th}$</td><td>4m+2(k-1)</td></tr>
<tr><td>…</td><td>4m+2(k-1)</td></tr>
<tr><td>$(m+1)^{th}$</td><td>4m+2(k-1)</td></tr>
<tr><td>m^{th}</td><td>4(m-1)</td><td rowspan="5">m teams in PCI</td></tr>
<tr><td>$(m-1)^{th}$</td><td>4(m-2)</td></tr>
<tr><td>…</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

- Exemple :

  n = 20, k = 7, m = 5 : Nous avons substitué le bloc (initialement en PCI) des 7 équipes indicées de 6 à 12 par un bloc de 7 équipes en PCB

→ Nous avons créé un Ventre Mou dans le championnat… ou, plus « positivement », nous avons créé une zone d’intense rivalité concurrentielle (en milieu de tableau).

Team	Points
20	76
19	72
18	68
17	64
16	60
15	56
14	52
13	48
12	32
11	32
10	32
9	32
8	32
7	32
6	32
5	16
4	12
3	8
2	4
1	0

- Par le même dispositif, mais en opérant la substitution des équipes initialement en PCI par des équipes en PCB **en haut de classement** (k = 4, m = 16), nous pouvons créer une zone d'intense rivalité concurrentielle en haut de tableau → c'est une configuration qui suggère l'existence d'une lutte très indécise, très attractive.

Team	Points
20	70
19	70
18	70
17	70
16	60
15	56
14	52
13	48
12	44
11	40
10	36
9	32
8	28
7	24
6	20
5	16
4	12
3	8
2	4
1	0

L'intuition fondamentale sur laquelle nous allons appuyer notre construction axiomatique est que, *dans une ligue fermée*, **plus la zone de forte rivalité concurrentielle est située vers le haut du classement, plus la ligue est attractive.**

Or, il est possible de montrer que, avec les indices traditionnels (HHI, σ^2, Gini, …), à nombre d'équipes dans le bloc en PCB k donné, l'indice *d'Imbalance Competitive* est **inchangé** quelle que soit la position du bloc d'intense rivalité concurrentielle dans le classement !

Ainsi, ces indices sont très décevants au titre d'indices d'*Imbalance-Attractivité*…

Exemple : (n = 20, k = 4)

On montre que HHI (σ^2, Gini, …) est indépendant de la position du bloc (unique) d'équipes en PCB, dans la distribution initiale en PCI (à k donné).

En effet, pour chacune des distributions ici à droite,

HHI = 0,06828255

Team	Points	Points	Points	Points	Points
20	76	76	76	76	70
19	72	72	72	72	70
18	68	68	68	68	70
17	64	64	64	64	70
16	60	60	60	54	60
15	56	56	56	54	56
14	52	52	52	54	52
13	48	48	48	54	48
12	44	44	38	44	44
11	40	40	38	40	40
10	36	36	38	36	36
9	32	32	38	32	32
8	28	22	28	28	28
7	24	22	24	24	24
6	20	22	20	20	20
5	16	22	16	16	16
4	6	12	12	12	12
3	6	8	8	8	8
2	6	4	4	4	4
1	6	0	0	0	0

La construction axiomatique sous-jacente à notre mesure d'Imbalance-Attractivité est fondée sur un axiome central qui dispose que *l'ascension dans le classement d'un bloc d'équipes en PCB* doit faire diminuer l'indice d'Imbalance et que *la descente d'un bloc d'équipes en PCB* doit faire fait augmenter l'indice d'Imbalance.

Rappelons préalablement les axiomes usuellement mobilisés pour bâtir des mesures d'inégalité :

. Symétrie (ou Anonymat)

. Normalisation

. Principe des Transferts

(. Principe de Population → non pertinent pour nos préoccupations présentes)

Propriétés désirables (non spécifiques) d'un Indice d'Imbalance

- Symmetry or anonymity : For all $n \in \mathbb{N}$, for all $p \in \mathbb{N}^n$, $I_{IMB}(p) = I_{IMB}(q)$ where q is any permutation of p

$\longrightarrow$ Imbalance is insensitive to reordering of points. Any characteristic other than the points, e.g., the identity of the teams, is irrelevant to the measurement of Imbalance.

- Normalization : For all $n \in \mathbb{N}$, $I_{IMB}(\bar{p}, \bar{p}, \ldots, \bar{p}) = 0$

$\longrightarrow$ Imbalance must take its minimum value whenever all teams have the same number of points

- Principle of transfers : For all $n \in \mathbb{N}$, for all

$p = (p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_j, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ and all positive real number Δ,

if $p_i < p_i + \Delta \leq p_j - \Delta < p_j$, then

$$I_{IMB}(p_1, \ldots, p_i + \Delta, \ldots, p_j - \Delta, \ldots, p_n) < I_{IMB}(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_j, \ldots, p_n)$$

$\longrightarrow$ any progressive transfer will decrease imbalance.

Théorème :

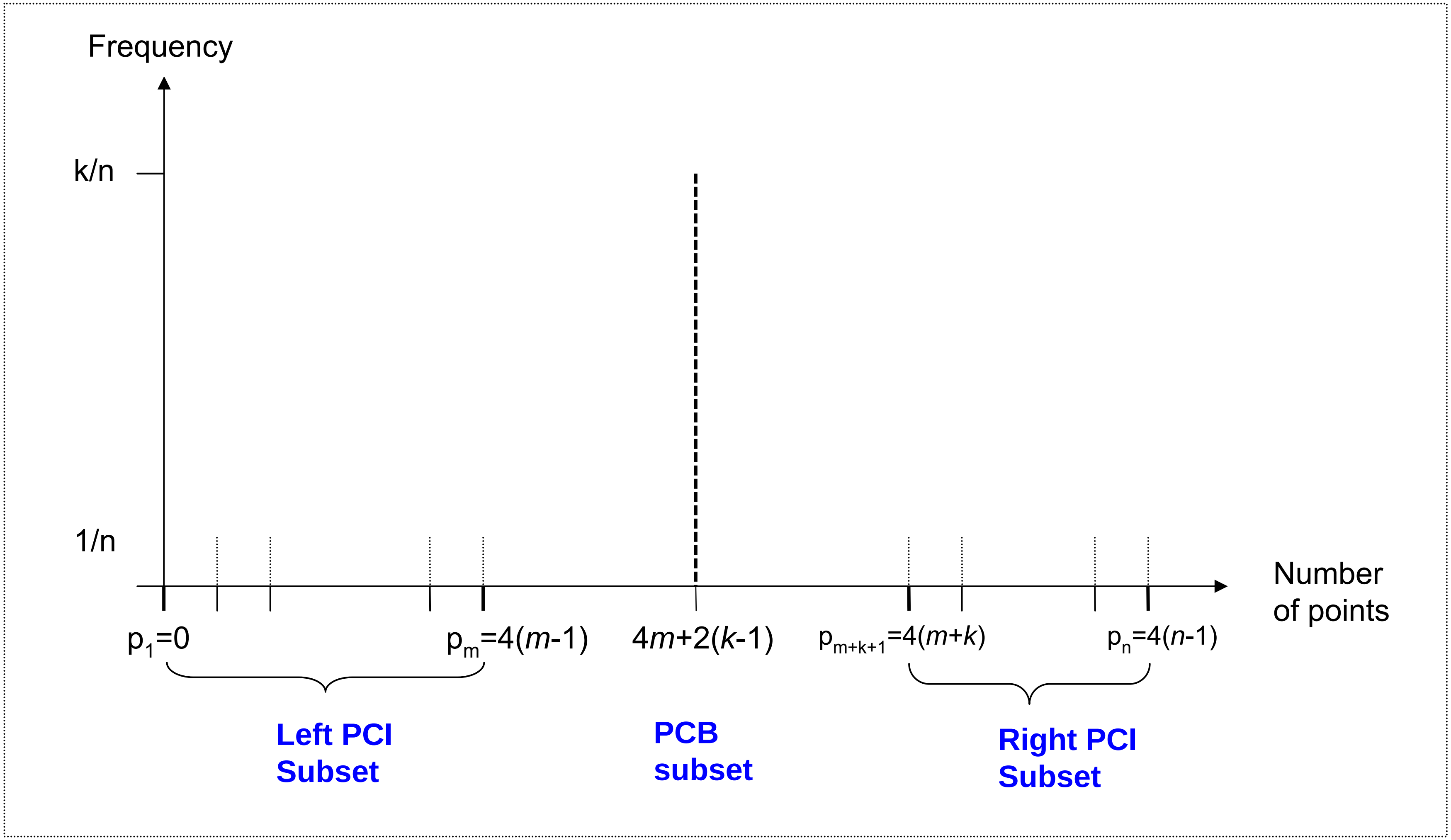
Toute mesure d'Entropie Généralisée GE(θ) vérifie les propriétés de
- Symétrie
- Normalisation
- Transférabilité

(c.f. Shorrocks (1980) (1984), Chakravarty (2001))

$$\theta \neq 0,1 \qquad GE(\theta) = \frac{1}{(\theta^2 - \theta)}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{\overline{p}}\right)^{\theta} - 1\right]$$

Propriétés désirables spécifiques de l'Indice d'Imbalance

1) Principe de « Diracization » : Dans une distribution initialement en PCI, toute substitution d'un sous-ensemble de k équipes par un bloc d'équipes en PCB doit faire diminuer l'*Imbalance*.



- Principle of “Diracization”

For all $n \in \mathbb{N}$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$ $p_i = 4(i\text{-}1)$, and for all k $(2 \leq k \leq n\text{-}1)$ and m $(1 \leq m \leq n\text{-}3)$ $q = 4m + 2(k\text{-}1)$, then:

$$I_{IMB}(p_1, \ldots, p_m, q, \ldots, q, p_{m+k+1}, \ldots, p_n) < I_{IMB}(p_1, \ldots, p_m, p_{m+1}, \ldots, p_{m+k}, p_{m+k+1}, \ldots, p_n)$$

→ L’Imbalance doit être plus faible pour une distribution Diracisée que pour une distribution en PCI.

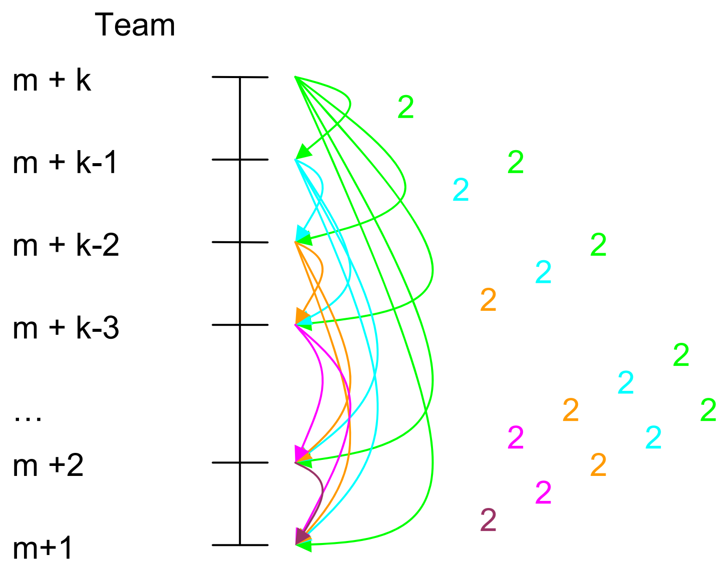
Proposition 1 :

Tout indice GE(θ) satisfait le Principle of “Diracization”

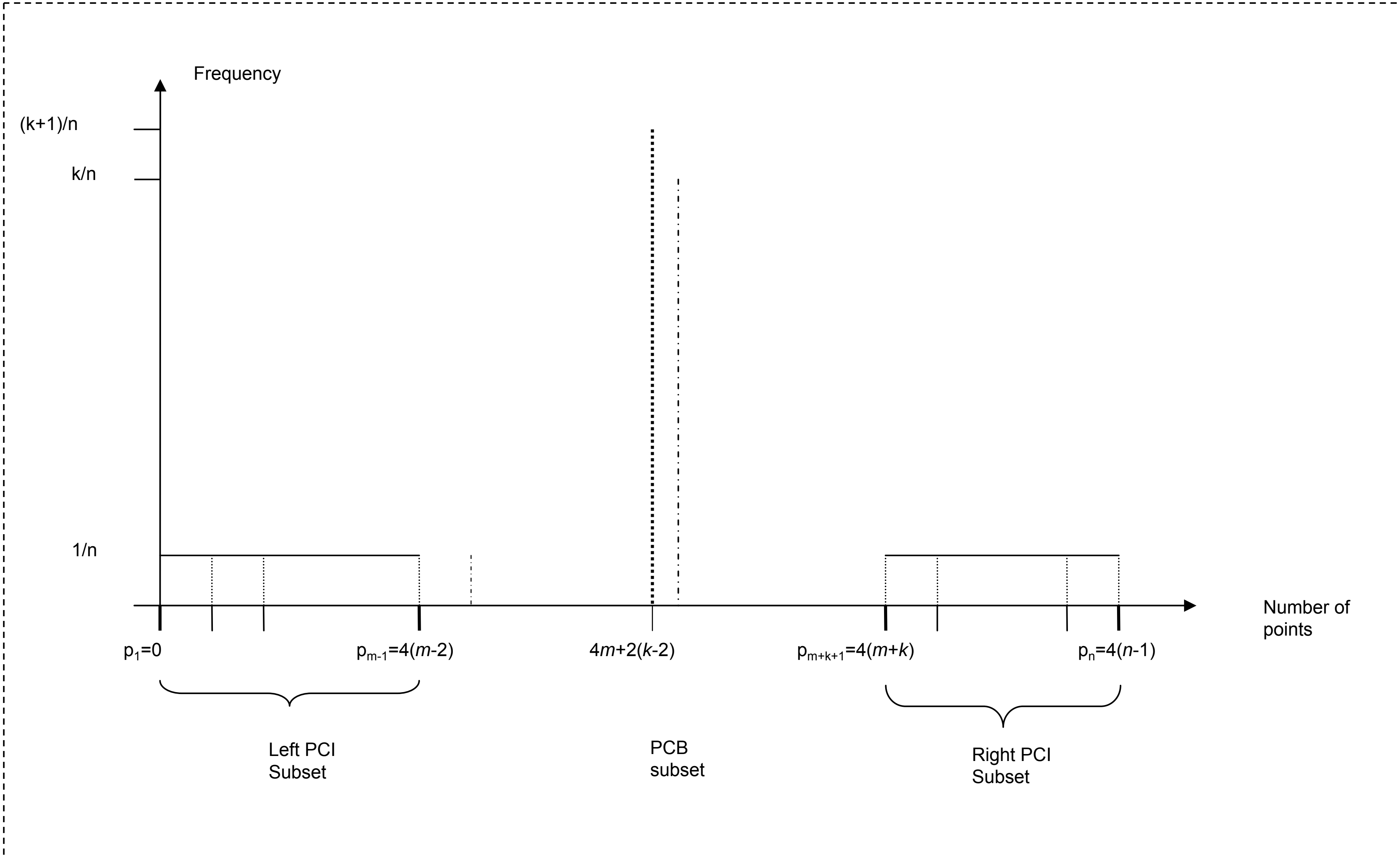
Intuition de la démonstration : Une “Diracisation” de la distribution de points ne conduit qu’à des transferts progressifs. Puisque tout indice GE(θ) satisfait le Principe des Transferts, tout indice GE(θ) satisfait le Principle of “Diracization”.

→ Une “Diracisation” de la distribution de points ne conduit en effet qu’à des transferts progressifs :

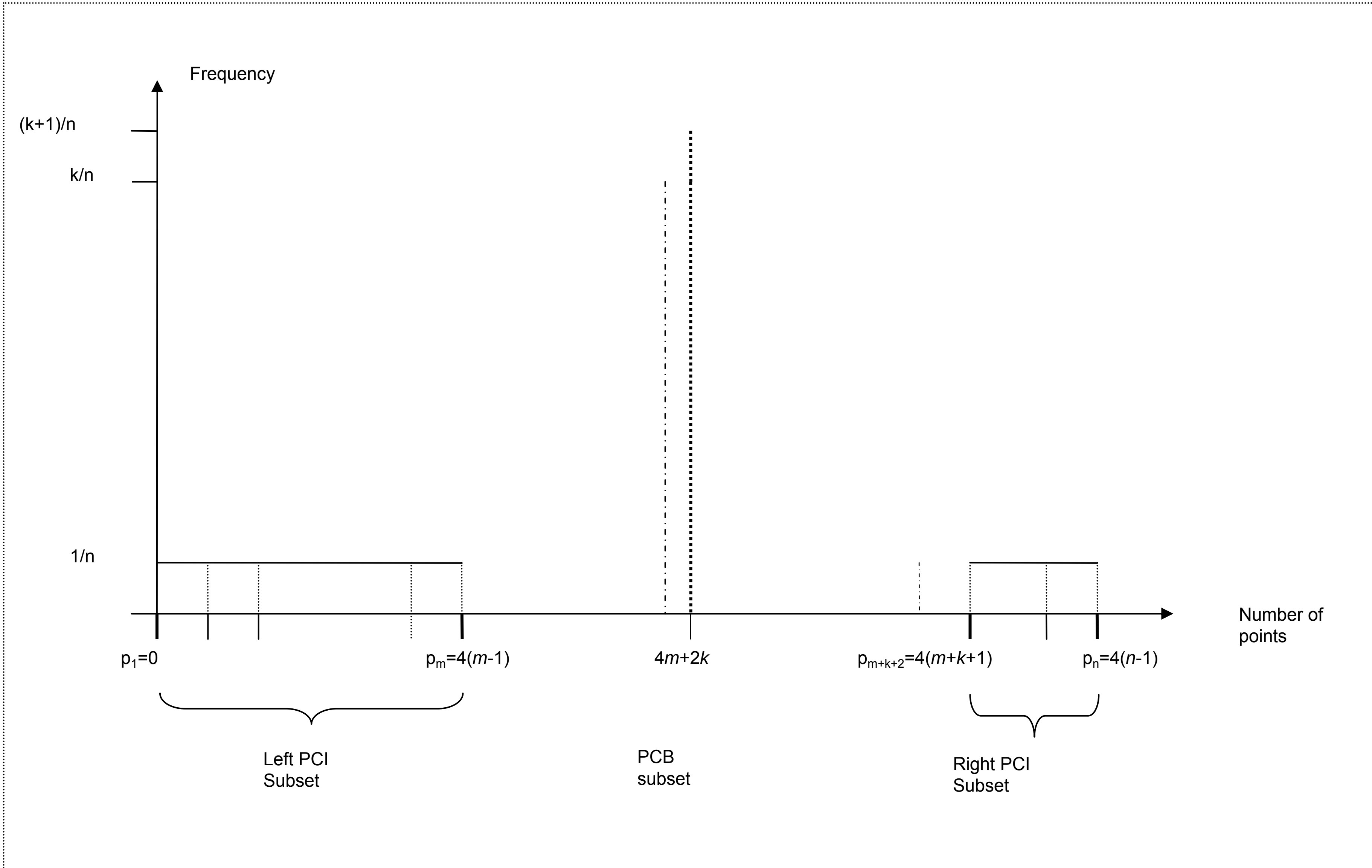
Plus précisément, la $(m+k)^{\text{ième}}$ équipe “donne” 2 points à chacune des (k-1) équipes moins bien classées, la $(m+k-1)^{\text{ème}}$ équipe “donne” 2 points à chacune des (k-2) équipes moins bien classées (et “reçoit” 2 points de l’équipe précédente), …, la $(m+2)^{\text{ème}}$ équipe “donne” 2 points à la $(m+1)^{\text{ème}}$ équipe (et “reçoit” $2(k-2)$ points des $(k-2)$ équipes mieux classées), et finalement la $(m+1)^{\text{ème}}$ équipe “reçoit” $2(k-1)$ points de la part des $(k-1)$ équipes mieux classées.



2) « Elargissement de l'ensemble Diracisée » : Tout élargissement (par le haut ou par le bas) du bloc d'équipes en PCB doit faire diminuer l'*Imbalance*.



Dans la diapositive précédente nous figurions un élargissement par le bas, dans celle-ci nous figurons un élargissement par le haut.



Que nous envisagions un élargissement par le bas ou par le haut du bloc d'équipes en PCB (faisant passer la taille du bloc de k à k+1), il paraît souhaitable que l'élargissement du bloc d'intense rivalité concurrentielle fasse diminuer l'indice d'*Imbalance*.

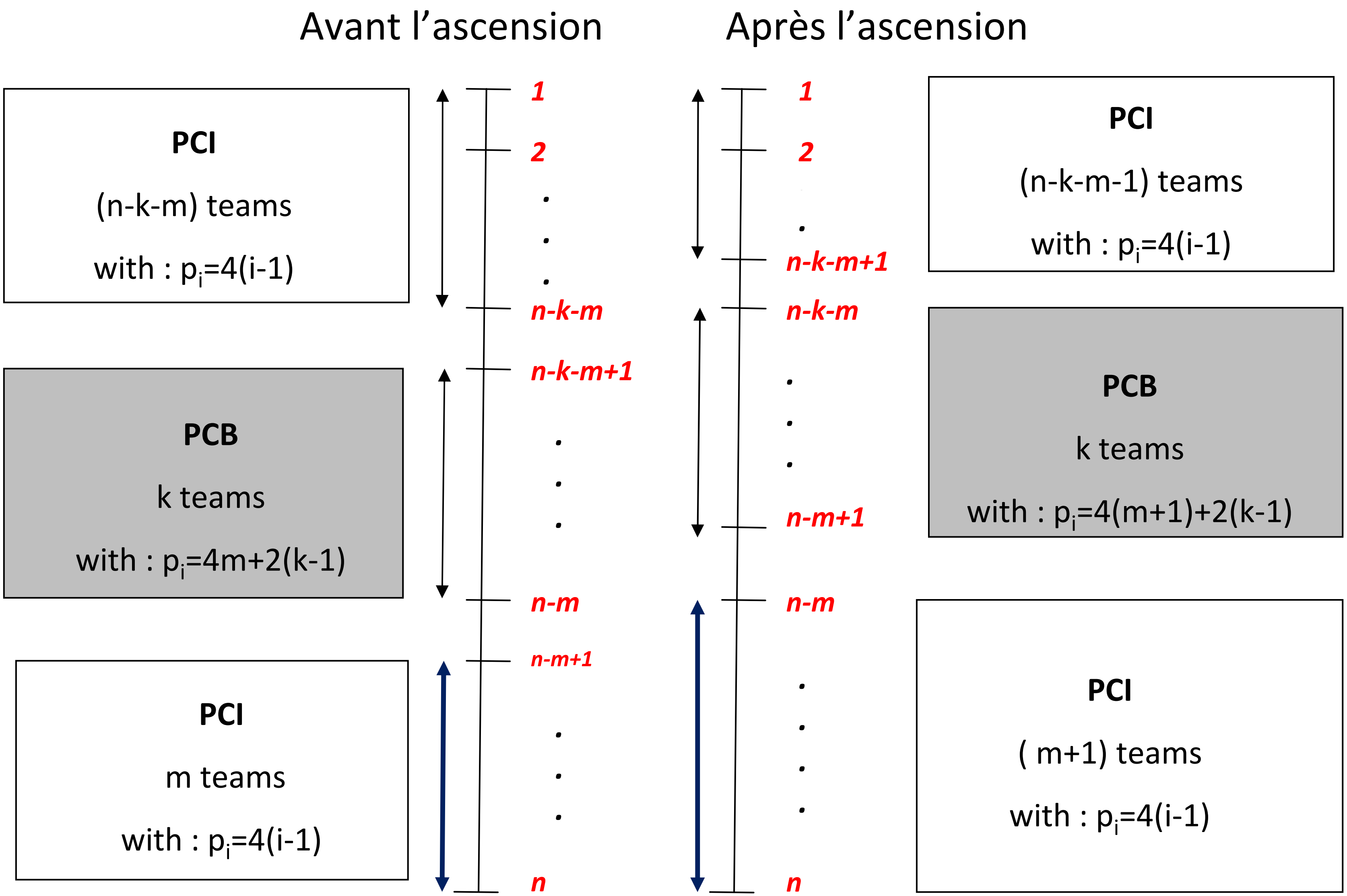
Proposition 2 :

Tout indice GE(θ) satisfait le Principe d'élargissement -par le haut ou par le bas- de l'ensemble "Diracisé".

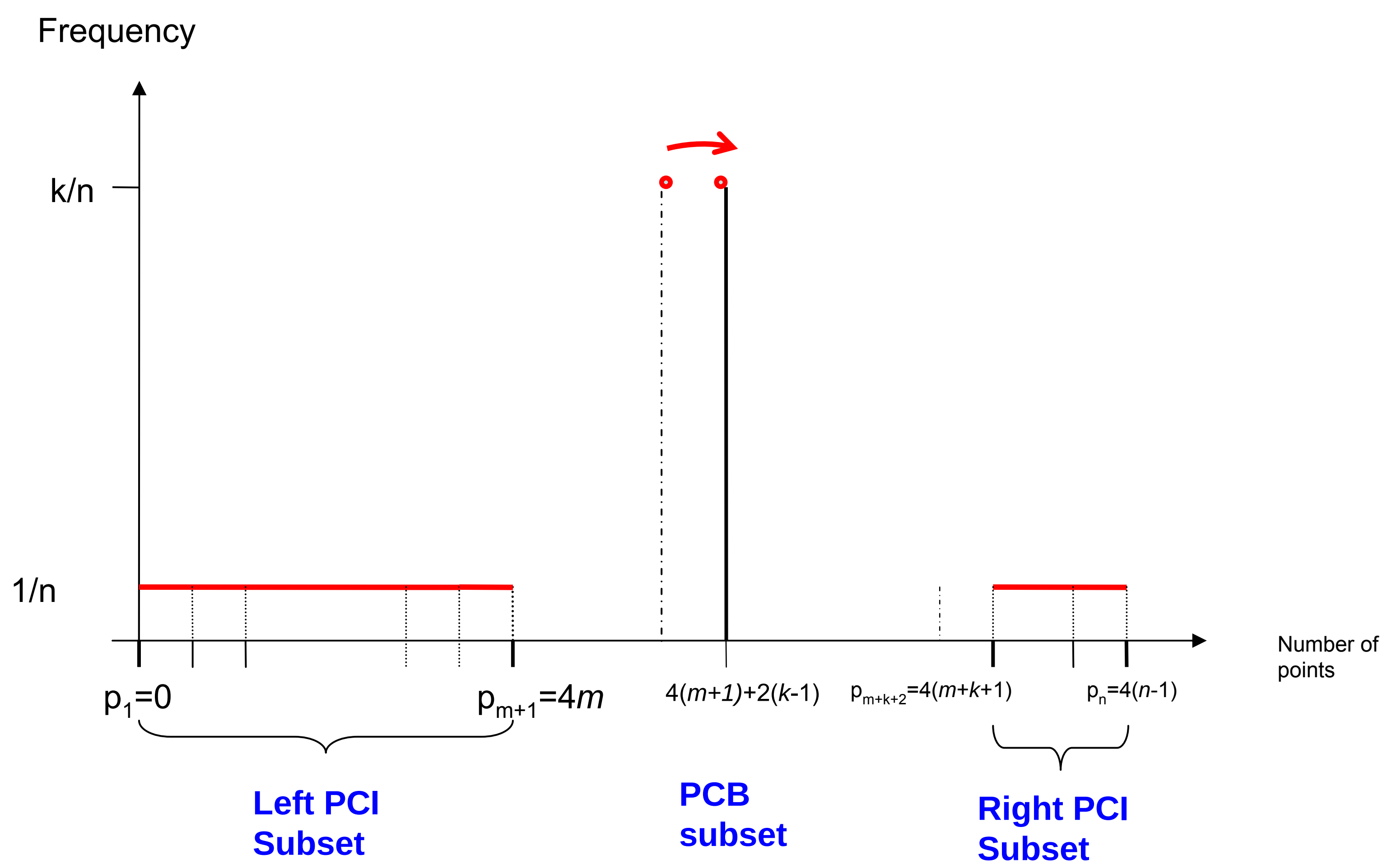
Intuition de la démonstration : Tout élargissement, par le bas ou par le haut du bloc d'équipes en PCB, est obtenu par une série de transferts progressifs…

Enfin, penchons nous maintenant sur l'axiome central de cette construction : l'axiome qui postule que toute ascension d'un bloc d'équipes en PCB doit faire diminuer l'*Imbalance* :

Déplacement vers la droite du sous-ensemble Diracisé = Ascension du bloc de k équipes en PCB



3) « Déplacement vers la droite de l'ensemble Diracisée » : Tout ascension du bloc d'équipes en PCB doit faire diminuer l'*Imbalance*.



Propriété de Rightward shift of the “Diracized” subset

For all $n \in \mathbb{N}$, *for all* k $(2 \leq k \leq n\text{-}1)$ *and* m $(1 \leq m \leq n\text{-}3)$,
$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $p_i = 4(i-1)$, *if* $q = 4m + 2(k-1)$ *and* $u = 4m + 2(k+1)$, *then:*

$$I_{IMB}(p_1, \ldots, p_m, p_{m+1}, u, \ldots, u, u, p_{m+k+2}, \ldots, p_n)$$
$$< I_{IMB}(p_1, \ldots, p_m, q, q, \ldots, , q, p_{m+k+1}, p_{m+k+2}, \ldots, p_n)$$

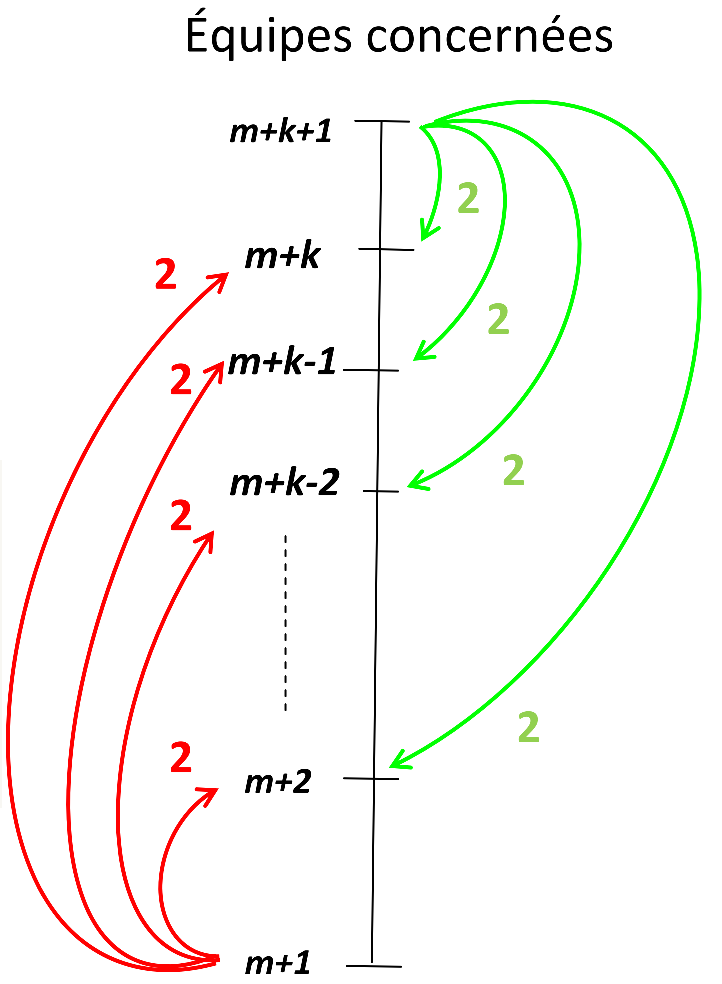
→ L’Imbalance doit être plus faible après l’ascension du bloc (de k équipes en PCB) qu’avant l’ascension.

Proposition 3 :

GE(θ) satisfait la “Propriété de Rightward shift of the Diracized subset” si et seulement si θ > 2

→ En effet un Rightward shift of the “Diracized” subset ne conduit pas qu’à des transferts progressifs ! Il conduit à autant de transferts régressifs que progressifs…

Ascension d'un bloc de k équipes en PCB : (k-1) transferts progressifs et (k-1) régressifs de points



(k-1) transferts régressifs de 2 points de la part de la (m+1)$^{\text{ème}}$ équipe au profit des (k-1) équipes plus «riches»

(k-1) transferts progressifs de 2 points de la part de la (m+k+1)$^{\text{ème}}$ équipe au profit des (k-1) équipes plus « pauvres »

- Exemple (cas n = 20 et k = 4) :

Team	Before ascent	After ascent	Change
20	76	76	0
19	72	72	0
18	68	68	0
17	64	64	0
16	60	60	0
15	56	56	0
14	52	52	0
13	48	42	-6
12	38	42	+4
11	38	42	+4
10	38	42	+4
9	38	32	-6
8	28	28	0
7	24	24	0
6	20	20	0
5	16	16	0
4	12	12	0
3	8	8	0
2	4	4	0
1	0	0	0

- L'ascension du bloc de k équipes conduit à (k-1) = 3 transferts égalitaires (de 2 points) au détriment de la 13$^{\text{ième}}$ équipe et au bénéfice des 12$^{\text{ième}}$, 11$^{\text{ième}}$ et 10$^{\text{ième}}$ équipes, et (k-1) = 3 transferts régressifs (de 2 points) au détriment de la 9$^{\text{ième}}$ équipe et au bénéfice des 10$^{\text{ième}}$, 11$^{\text{ième}}$ et 12$^{\text{ième}}$ équipes.

- Dans les ligues fermées, il serait souhaitable, pour mesurer l'*Imbalance*, de recourir à une mesure GE(θ) avec un paramètre $\theta > 2$ (et en travaillant avec un P.A.S respectant $2z_t = z_w + z_l$)

- Exemple : Classement final de la « Liga » en 1971 et en 1986

Ranking	(1970-)1971	Points	(1985-)1986	Points
1st	Valencia CF	43	Real Madrid	56
2nd	FC Barcelona	43	FC Barcelona	45
3rd	Atl. Madrid	42	Atl. Bilbao	43
4th	Real Madrid	41	Zaragoza	42
5th	Atl. Bilbao	35	Atl. Madrid	42
6th	…	…	…	…
…	…	…	…	…
GE(2)		0,0440		0,0408
GE(6)		0,0520		0,0534

- Une limite à cette idée est la présence de seuils : seuil de participation à une ligue continentale, seuil de participation à des play-offs, … L'ascension d'un Bloc d'équipes en PCB peut ne pas être souhaitable à certains niveau du classement

- Autre interrogation : Sachant que l'Indice d'Atkinson (AKS) peut être obtenu comme une transformation ordinale de GE(θ) lorsque $\theta \leq 1$, on peut donc obtenir, en corrolaire de la proposition principale que, pour un tel indice, une ascension de bloc d'équipes en PCB va **accroître** la valeur prise par l'indice.

→ Quelle est donc la forme pertinente de la *League Welfare Function* sous-jacente à un indice d'Imbalance satisfaisant ?

Une autre extension à ce travail serait de partir d'une *League Welfare Function* appropriée et d'envisager la présence d'une ou plusieurs équipes "plus appréciée" (étude du *socially desirable level of Imbalance*)

→ Il nous est facile d'envisager au moins deux cas dans lesquels le principe de l'ascension d'un bloc d'équipes en PCB pourrait ne pas être souhaitable :

- si, suite à une montée du bloc, l'équipe la plus appréciée était exclue du bloc d'équipes en PCB
- si, suite à une montée du bloc, l'équipe la plus appréciée était absorbée par le bloc d'équipes en PCB

Dans les 2 cas, le *welfare* des fans de l'équipe en question serait dégradé et il se peut que la dégradation du *welfare* de ceux-ci excède l'accroissement de *welfare* obtenu par les autres spectateurs.